Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen
14 October 2002, 14.00–17.00 uur

1. Los het volgende Cauchy probleem op:

$$u_x - u_t = 1 - e^{-t}, \quad u(x,0) = x.$$

2. Bepaal de oplossing van de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

die voldoet aan de randcondities

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = x^2.$$

3. Beschouw de warmte-geleidingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

met de bepaalde randvoorwaarden

$$\begin{cases} u(x,0) = -\frac{1}{2}x^2, & 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = \frac{1}{2}\pi^2, \quad u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

   (a) Laat zien dat de vergelijking en de randcondities tegelijkertijd homogeen gemaakt kunnen worden.

   (b) Geef de oplossing van het oorspronkelijke probleem.

4. Bepaal u als oplossing van de Laplace vergelijking in $\mathbb{R}^2$ die begrensd is op $x^2 + y^2 \leq 1$, als gegeven is dat u radiaal-symmetrisch is, d.w.z. alleen van $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ afhangt.
Aanwijzing: Laat zien dat met $u(x,y) = G(r)$ geldt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G''(r) + \frac{1}{r}G'(r), \quad (x,y) \neq (0,0).$$